Математическая олимпиада «MT Classes»

11–12 лет • 90 минут • октябрь 2026 года • Russian

Тестовые задачи

В каждой задаче дано несколько вариантов ответа. Выберите один правильный и запишите его в бланк.

Задача 1 (3 балла). Семерым друзьям Миша пишет ежедневно, а каждому из девяти других — через день. Сегодня он написал десятерым друзьям. Скольким друзьям он напишет завтра?

(а) 6 **(б)** 7 **(в)** 9 **(г)** 13 **(д)** 16

Ответ: 13

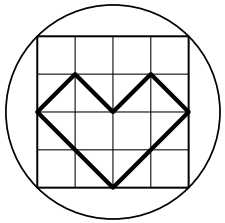
Решение. Кроме семи друзей, которым Миша пишет ежедневно, сегодня он написал троим из девяти друзей, которым пишет через день. Значит, завтра он напишет остальным шестерым из этой девятки и семерым ежедневным собеседникам. Итого

$$6 + 7 = 13.$$

□

Задача 2 (3 балла).

В круг диаметром 10 см вписан квадрат, разделённый на 16 равных квадратов. Чему равен периметр фигуры, нарисованной жирной линией?



(а) 8 **(б)** 16 **(в)** 20 **(г)** 24 **(д)** 30

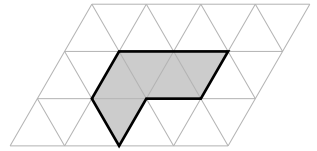
Ответ: 20

Решение. Диагональ большого квадрата является диаметром окружности и равна 10 см. Она состоит из четырёх диагоналей маленьких клеток. Жирная линия состоит из восьми таких диагоналей, поэтому её длина вдвое больше и равна 20 см. □

Задачи с ответом

Нужно записать только итоговый ответ (число, выражение, пример, короткую формулировку — как требуется в условии). Решение приводить не нужно: проверяется только ответ.

Задача 3 (5 баллов).



На треугольной сетке составляют фигуры из маленьких равносторонних треугольников со стороной 1. Фигура на рисунке справа состоит из пяти таких треугольников, имеет периметр 7 и шесть вершин. Вершинами фигуры считаются точки, в которых её граница меняет направление.

Закрасьте 10 треугольников, соединённых между собой по сторонам, так, чтобы получилась фигура без дырок с периметром 12 и девятью вершинами.

Ответ: См. рисунок в решении.

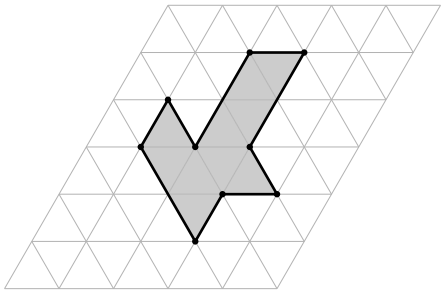
Решение. Если два закрашенных треугольника имеют общую сторону, эта сторона не входит в периметр фигуры. Поэтому каждая общая сторона уменьшает сумму периметров отдельных треугольников на 2.

У десяти отдельных треугольников сумма периметров равна 30. Чтобы периметр фигуры был равен 12, должно быть

$$\frac{30 - 12}{2} = 9$$

общих сторон. Это возможно, например, если последовательно присоединять каждый новый треугольник к предыдущим ровно по одной стороне.

Один из подходящих примеров изображён на рисунке. Точками отмечены девять вершин фигуры.



Фигура состоит из десяти треугольников, имеет девять общих сторон, поэтому её периметр равен $30 - 2 \cdot 9 = 12$. Направление границы меняется в девяти отмеченных точках. □

Задача 4 (5 баллов). Лидия выписывает несколько однозначных чисел, затем складывает их слева направо и записывает каждую промежуточную сумму. Например, начав с чисел 3, 9, 5, она получит записи 3, 9, 5, 12, 17, в которых встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 7, 9.

Приведите пример четырёх исходных чисел, чтобы после вычислений на доске встретилась каждая цифра от 1 до 9.

Ответ: Например, 4, 5, 8, 6.

Решение. Удобно сначала подобрать промежуточные суммы, а затем восстановить исходные числа. Если разность двух последовательных сумм является однозначным числом, то именно это число можно поставить следующим в последовательности. Первую сумму нужно разложить на два однозначных слагаемых.

Выберем, например, промежуточные суммы 17 и 23. В них встречаются цифры 1, 2, 3 и 7, а их разность равна $23-17=6$. Перед числом 17 удобно получить сумму 9: тогда следующим исходным числом будет $17-9=8$. Наконец, $9=4+5$.

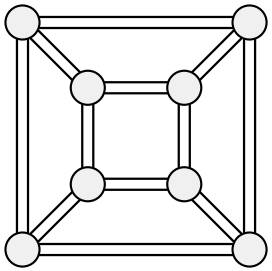
Таким способом получаем последовательность

$$4,\ 5,\ 8,\ 6.$$

Другие подходящие примеры можно строить аналогично, выбирая иные промежуточные суммы и восстанавливая исходные числа по их разностям. □

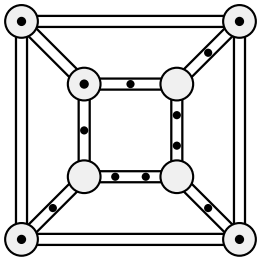
Задача 5 (5 баллов).

В парке есть 8 круглых площадок, соединённых дорожками, как показано на рисунке. Директор парка хочет установить 14 фонарей так, чтобы каждая дорожка освещалась одним и тем же числом фонарей.



На каждой круглой площадке можно установить не более одного фонаря, а вдоль дорожек — любое количество фонарей. Фонарь, установленный на площадке, освещает все дорожки, выходящие из этой площадки. Фонарь, установленный на дорожке, освещает только эту дорожку. Приведите пример расстановки фонарей.

Ответ: Например, можно расставить фонари так, как показано на рисунке. Чёрными точками отмечены фонари.



Решение. Будем добиваться того, чтобы каждую дорожку освещали ровно два фонаря. Поставим по одному фонарю на пяти площадках, отмеченных на рисунке. Затем на каждой дорожке поставим столько фонарей, чтобы вместе с фонарями на её концах их стало два.

На четырёх внешних дорожках дополнительные фонари не нужны. На четырёх внутренних дорожках потребуется соответственно 1, 2, 2 и 1 фонарь, а на дорожках, соединяющих внешний и внутренний квадраты, — соответственно 0, 1, 1 и 1 фонарь. Всего вдоль дорожек будет установлено

$$1+2+2+1+0+1+1+1=9$$

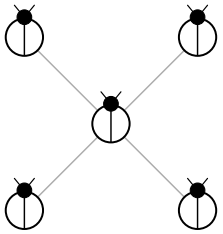
фонарей, а вместе с пятью фонарями на площадках получится 14 фонарей. При этом каждую дорожку освещают ровно два фонаря. □

Задачи с развёрнутым решением

Нужно написать полное решение: ход рассуждений, обоснования и доказательство (где требуется). Проверяется не только ответ, но и логика решения.

Задача 6 (7 баллов).

Пять божьих коровок выстроились, как показано на рисунке. Оказалось, что у трёх коровок на одной диагонали всего 15 чёрных точек, а на другой диагонали — всего 16 точек. У двух коровок слева 14 точек, а у всех вместе — 26 точек. Сколько точек у двух божьих коровок справа?



Ответ: 7

Решение. Сложим количества точек на двух диагоналях. Получится

$$15+16=31.$$

При этом точки четырёх крайних божьих коровок посчитаны по одному разу, а точки центральной — дважды. Значит, по сравнению с общим количеством точек мы один раз дополнительно посчитали точки центральной коровки. Поэтому у неё

$$31-26=5$$

точек.

У двух коровок слева вместе 14 точек. Значит, у двух левых и центральной коровок всего

$$14+5=19$$

точек. У всех пяти коровок 26 точек, поэтому у двух коровок справа

$$26-19=7$$

точек. □

Задача 7 (7 баллов). На уроке трансфигурации профессор Макгонагалл взмахнула палочкой, и на доске сама собой появилась цепочка различных двузначных чисел. Ученикам

дали задание: Гарри стирает с доски все числа, делящиеся на 2, Рон — делящиеся на 3, Гермиона — делящиеся на 5, Невилл — делящиеся на 7.

Волшебники выполняли задание по очереди, но неизвестно, в каком порядке. В результате Гарри стёр числа 32 и 56, Рон — 24, 33, 45, Гермиона — 20, 25 и 35.

Известно, что Невилл стёр ровно три числа. Какие?

Ответ: 49, 77 и 91

- 45 делится на 3 и на 5, но стёр его Рон. Значит, Рон был раньше Гермионы;
- 20 делится на 2 и на 5, но стёрла его Гермиона. Значит, Гермиона была раньше Гарри;
- 56 делится на 2 и на 7, но стёр его Гарри. Значит, Гарри был раньше Невилла.

Решение. Получаем единственный возможный порядок:

$$\text{Рон} \to \text{Гермиона} \to \text{Гарри} \to \text{Невилл}.$$

Следовательно, Невилл мог стереть только числа, которые делятся на 7, но не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5: иначе их раньше стёр бы кто-то из остальных учеников.

Среди двузначных чисел, кратных 7:

$$14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63,\ 70,\ 77,\ 84,\ 91,\ 98.$$

Из них не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5 только числа 49, 77 и 91. Таких чисел ровно три, поэтому именно их и стёр Невилл. □