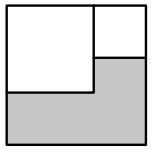
Математическая олимпиада «MT Classes»

13–14 лет • 90 минут • октябрь 2026 года • Russian

Тестовые задачи

В каждой задаче дано несколько вариантов ответа. Выберите один правильный и запишите его в бланк.

Задача 1 (3 балла).



На рисунке большой квадрат разделён на два меньших квадрата, периметры которых равны 20 см и 12 см, и закрашенную фигуру. Найдите периметр закрашенной фигуры.

(а) 24 **(б)** 26 **(в)** 28 **(г)** 30 **(д)** 32

Ответ: 26

Решение. Стороны двух меньших квадратов равны соответственно

$$20 : 4 = 5 \qquad \text{и} \qquad 12 : 4 = 3.$$

Поэтому сторона большого квадрата равна $5 + 3 = 8$.

Граница закрашенной фигуры состоит из отрезков длиной

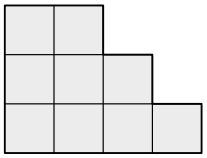
$$8,\ 5,\ 3,\ 2,\ 5,\ 3.$$

Следовательно, её периметр равен

$$8 + 5 + 3 + 2 + 5 + 3 = 26.$$

□

Задача 2 (3 балла).



Фигура составлена из одинаковых клеток, как показано на рисунке. Сколько всего прямоугольников, стороны которых проходят по линиям сетки, можно найти на рисунке? Квадраты также считаются прямоугольниками.

(а) 25 **(б)** 27 **(в)** 29 **(г)** 31 **(д)** 33

Ответ: 31

Решение. Переберём прямоугольники по числу рядов клеток.

В нижнем ряду можно выбрать любой отрезок из четырёх подряд идущих клеток. Таких прямоугольников

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

В среднем ряду получаем

$$3 + 2 + 1 = 6$$

прямоугольников, а в верхнем —

$$2 + 1 = 3.$$

Всего прямоугольников высоты в одну клетку

$$10 + 6 + 3 = 19.$$

Теперь посчитаем прямоугольники высоты в две клетки. В двух нижних рядах их

$$3 + 2 + 1 = 6,$$

а в двух верхних —

$$2 + 1 = 3.$$

Значит, таких прямоугольников $6 + 3 = 9$.

Наконец, через все три ряда проходят три прямоугольника: два ширины в одну клетку и один ширины в две клетки.

Поэтому всего на рисунке

$$19 + 9 + 3 = 31$$

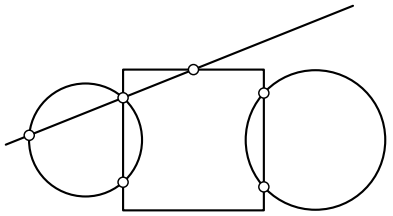
прямоугольник. □

Задачи с ответом

Нужно записать только итоговый ответ (число, выражение, пример, короткую формулировку — как требуется в условии). Решение приводить не нужно: проверяется только ответ.

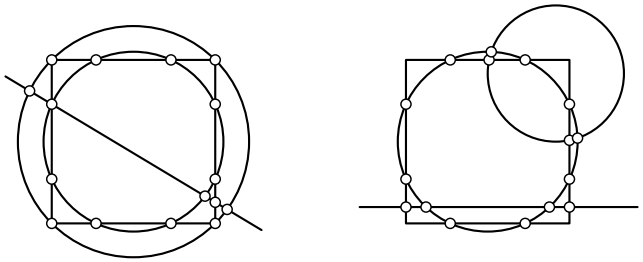
Задача 3 (5 баллов).

На рисунке две окружности, квадрат и прямая имеют в сумме 6 отмеченных точек пересечения.



Приведите пример расположения этих же геометрических фигур на плоскости, при котором получится ровно 16 различных точек пересечения. Расположение и размеры фигур можно менять.

Ответ: Например, вот такие конструкции:



Задача 4 (5 баллов). Трёхзначное число назовём *самовлюблённым*, если оно равно сумме кубов своих цифр. Например, число 123 не самовлюблённое, так как сумма кубов его цифр не равна 123: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \neq 123$. Найдите какое-нибудь одно самовлюблённое число.

Ответ: Например, числа 153, 370, 371, 407.

Решение. Рассмотрим кубы цифр от 0 до 9:

$$0^3 = 0,\ 1^3 = 1,\ 2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,$$

$$5^3 = 125,\ 6^3 = 216,\ 7^3 = 343,\ 8^3 = 512,\ 9^3 = 729.$$

Используя эти значения, получаем, например:

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153,$$

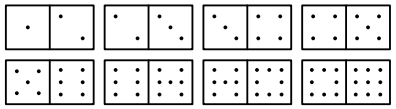
поэтому число 153 подходит. Другие подходящие примеры:

$$3^3 + 7^3 + 0^3 = 370, \qquad 3^3 + 7^3 + 1^3 = 371, \qquad 4^3 + 0^3 + 7^3 = 407.$$

□

Задача 5 (5 баллов).

Даны восемь костей домино, изображённых справа. Замостите ими таблицу 4×4 без наложений так, чтобы суммы точек во всех строках и столбцах были равны.

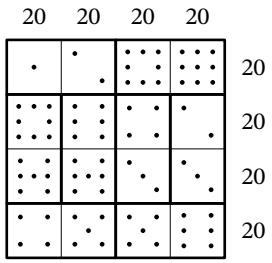


Ответ: См. рисунок в решении.

Решение. Всего на костях

$$(1 + 2) + (2 + 3) + \ldots + (8 + 9) = 80$$

точек, поэтому сумма в каждой строке и каждом столбце должна быть равна $80 : 4 = 20$. Положим кость 8–9 горизонтально. Тогда в двух оставшихся клетках этой строки должны стоять числа 1 и 2. Одно из подходящих замощений показано ниже; числа справа и сверху подтверждают суммы по строкам и столбцам.



□

Задачи с развёрнутым решением

Нужно написать полное решение: ход рассуждений, обоснования и доказательство (где требуется). Проверяется не только ответ, но и логика решения.

Задача 6 (7 баллов). 2026-значное число составили по следующему правилу: его первая цифра равна 2, вторая — 7, а каждая последующая цифра равна цифре единиц произведения двух предыдущих. Сколько раз в записи этого числа встречается цифра 8?

Ответ: 338

Решение. Выпишем начало числа:

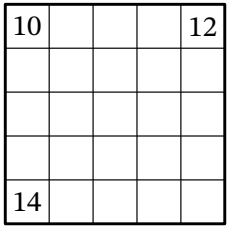
$$2,\ 7,\ 4,\ 8,\ 2,\ 6,\ 2,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

Пара цифр 4, 8, стоящая на третьем и четвёртом местах, снова встречается на девятом и десятом. Каждая цифра определяется двумя предыдущими, поэтому дальше последовательность повторяется: начиная с третьей цифры она состоит из периодов 4, 8, 2, 6, 2, 2 длины 6.

Цифр, начиная с третьей, будет $2026 - 2 = 2024 = 6 \cdot 337 + 2$. В каждом периоде ровно одна цифра 8, то есть в 337 полных периодах их 337. Две оставшиеся цифры — это 4, 8, они добавляют ещё одну восьмёрку. Итого $337 + 1 = 338$. □

Задача 7 (7 баллов).

Можно ли расставить в клетках квадрата 5×5 натуральные числа 1, 2, 3, … , 25 так, чтобы для любого числа, большего 1, **хотя бы в одной из соседних по стороне клеток** стояло число на 1 или на 2 меньшее его, а числа 10, 12, 14 стояли как на картинке?



Ответ: Нельзя.

Решение. Предположим, что числа расставить можно. По условию у каждого числа, большего 1, в соседней по стороне клетке должно находиться хотя бы одно число на 1 или на 2 меньше. Рассмотрим число 14. Рядом с ним должно стоять либо 13, либо 12. Но 12 уже стоит в правом верхнем углу и с 14 не соседствует. Значит, рядом с 14 обязательно должно стоять число 13.

Теперь рассмотрим число 13. Рядом с ним должно стоять либо 12, либо 11. Число 13 находится в клетке, соседней с 14, поэтому оно может стоять только непосредственно над 14 или непосредственно справа от него. В обоих случаях число 13 не может соседствовать с числом 12. Значит, рядом с 13 обязательно должно стоять число 11. Но тогда число 11 также находится вблизи левого нижнего угла квадрата и не может соседствовать с числом 12, стоящим в правом верхнем углу.

Наконец, рассмотрим число 12. Рядом с ним должно стоять либо 11, либо 10. С числом 11, как мы выяснили, оно соседствовать не может. Значит, 12 должно соседствовать с 10. Но по рисунку числа 10 и 12 не соседствуют.

Получили противоречие. Следовательно, такую расстановку сделать нельзя. □